

# 1. Cinematica Directa

Para el cálculo de Cinematica Directa se utiliza la convención de Denavit-Hartenberg en la asignación de los sistemas de coordenadas.

Cálculo de parámetros de Denavit-Hartenberg:

$$\begin{aligned}\theta &= \angle(X_{i-1} \rightarrow X_i)/Z_{i-1} \\ d &= \text{dist}(O_{i-1} \rightarrow X_i/Z_{i-1})/Z_{i-1} \\ a &= \text{dist}(X_i/Z_{i-1} \rightarrow O_i)/X_i \\ \alpha &= \angle(Z_{i-1} \rightarrow Z_i)/X_i\end{aligned}$$

- $\theta$ : ángulo que forma  $X_{i-1}$  con  $X_i$  medido sobre  $Z_{i-1}$
- $d$ : distancia desde el origen  $O_{i-1}$  hasta el punto intersección entre  $X_i$  y  $Z_{i-1}$ , medido a lo largo de  $Z_{i-1}$
- $a$ : distancia desde el punto intersección entre  $X_i$  y  $Z_{i-1}$  hasta el origen  $O_i$ , medido a lo largo de  $X_i$
- $\alpha$ : ángulo que forma  $Z_{i-1}$  con  $Z_i$  medido sobre  $X_i$

Matriz de transformación homogénea:

$$\mathbf{A}_{\text{DH}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha & a \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \theta \sin \alpha & a \sin \theta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algunas identidades útiles:

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi/2) &= \cos(x) \\ \sin(x - \pi/2) &= -\cos(x) \\ \cos(x + \pi/2) &= -\sin(x) \\ \cos(x - \pi/2) &= \sin(x)\end{aligned}$$

## 1.1. RRR - Brazo Antropomorfo

A continuación se describe la estructura cinemática de un brazo antropomórfico de 3 grados de libertad (GDL) rotacionales. El elemento terminal corresponde a la muñeca del robot manipulador. La selección de los sistemas de coordenadas locales a cada eje de rotación siguen la convención de Denavit-Hartenberg. La Figura 1 ilustra la estructura del brazo, así como cada uno de los ejes de referencia locales a cada una de las articulaciones.

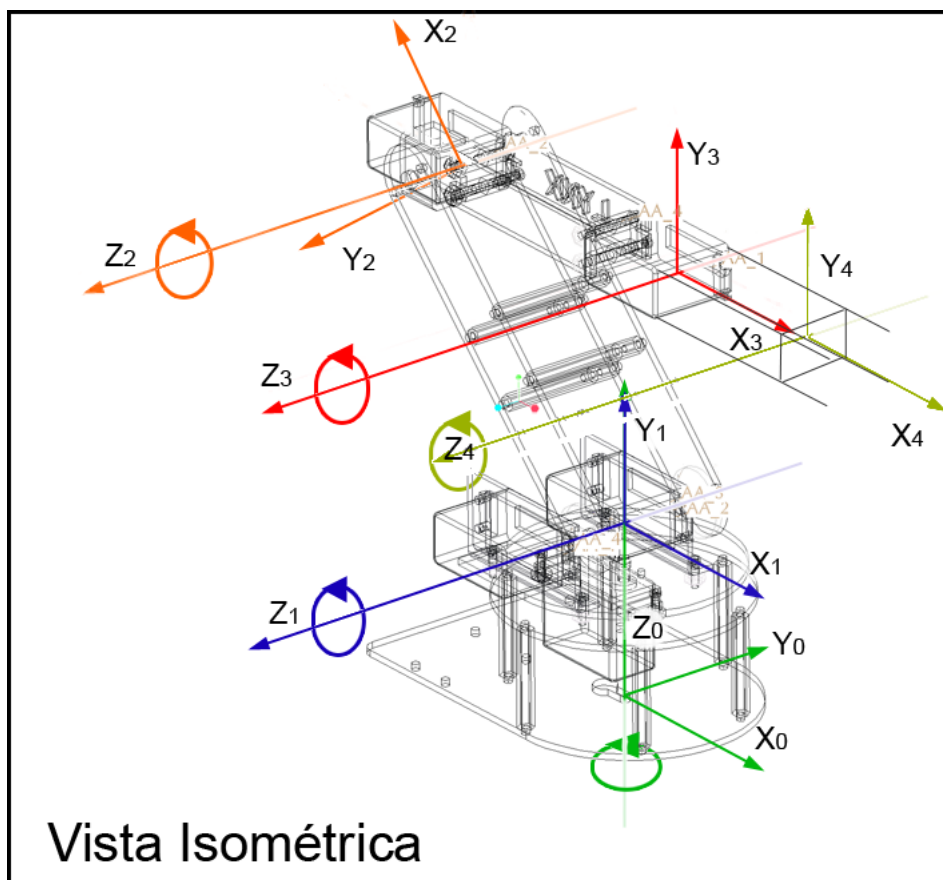


Figura 1: Estructura cinemática de robot antropomórfico de 3GDL

En la Figura 2 se muestra una vista lateral del robot, donde se identifican c/u de los eslabones. Observando estas figuras obtenemos los siguientes parámetros DH:

Sustituyendo cada uno de los parámetros D-H en la matriz de transformación para cada sistema local, tenemos:

1<sup>er</sup> Grado de Libertad (base)

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

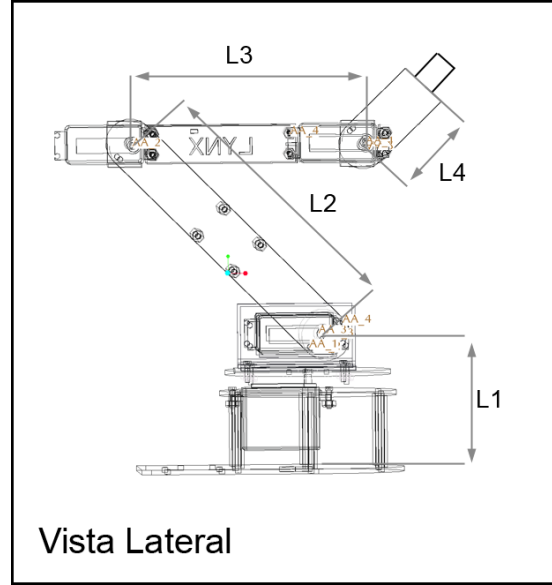


Figura 2: Vista lateral. Longitudes de eslabones

Eslabón	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$L_1$	0	$\pi/2$
2	$q_2 + \pi/2$	0	$L_2$	0
3	$q_3 - \pi/2$	0	$L_3$	0

Tabla 1: Parametros DH para robot antropomorfo

**2<sup>do</sup> Grado de Libertad (hombro)**

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & -L_2 \sin q_2 \\ \cos q_2 & \sin q_2 & 0 & L_2 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**3<sup>er</sup> Grado de Libertad (codo)**

$$A_2^3 = \begin{pmatrix} -\sin q_3 & -\cos q_3 & 0 & -L_3 \sin q_3 \\ \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & -L_3 \cos q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de transformación homogénea del sistema de coordenada final con respecto al sistema base, multiplicamos cada una de las matrices de transformación parciales. Esto nos da:

$$A_0^3 = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot A_2^3 \quad (1)$$

Calculando  $A_0^2 = A_0^1 \cdot A_1^2$  tenemos:

$$\mathbf{A}_0^2 = \begin{pmatrix} -\cos q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 \cos q_2 & \sin q_1 & -L_2 \cos q_1 \sin q_2 \\ -\sin q_1 \sin q_2 & -\sin q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 & -L_2 \sin q_1 \sin q_2 \\ \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & L_2 \cos q_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente para la matriz  $A_0^3 = A_0^2 \cdot A_2^3$  nos queda:

$$\mathbf{A}_0^3 = \begin{pmatrix} -\cos q_1 \cos(q_2 + q_3) & \cos q_1 \sin(q_2 + q_3) & \sin q_1 & L_3 \cos q_1 \cos(q_2 - q_3) - L_2 \cos q_1 \sin q_2 \\ -\sin q_1 \cos(q_2 + q_3) & \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) & \cos q_1 & L_3 \sin q_1 \cos(q_2 - q_3) - L_2 \sin q_1 \sin q_2 \\ -\sin(q_2 + q_3) & \cos(q_2 + q_3) & 0 & L_3 \sin(q_2 - q_3) + L_2 \cos q_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eslabón	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	0	$L_1$	$\pi/2$
2	$q_2$	0	$L_2$	0
3	$q_3$	0	$L_3$	0

Tabla 2: Parametros DH para pata de 3GDL

## 1.2. RRR - Cinematica de pata 3GDL de Cuadrupedo

A continuacion se describe la estructura cinematica de una pata de 3 grados de libertad (GDL) de un robot cuadrupedo. La disposicion de las articulaciones corresponde a una pata tipo reptil. La Figura 3 ilustra la estructura de la pata, asi como cada uno de los ejes de referencia locales a cada una de las articulaciones.

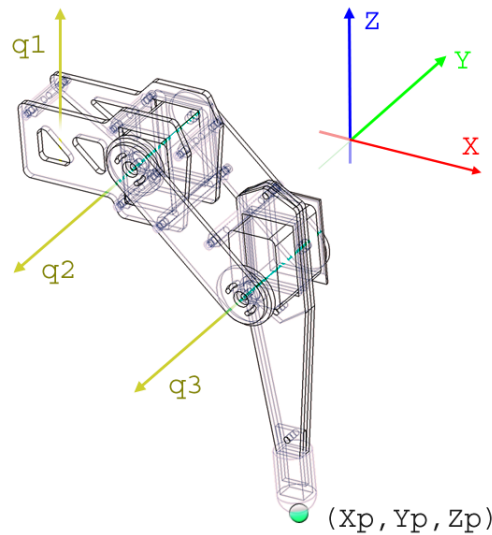


Figura 3: Estructura cinemática de robot antropomorfo de 3GDL

Observando esta figura se obtienen los parametros de Denavit-Hartenberg para la pata de 3GDL, tal como se muestran en la Tabla 1.2

Las matrices de transformacion homogeneas parciales resultantes son la siguientes:

**1er GDL**

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & L_1 \cdot \cos q_1 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & L_1 \cdot \sin q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2do GDL

$$\mathbf{A}_1^2 = \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & L_2 \cdot \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & L_2 \cdot \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3er GDL

$$\mathbf{A}_2^3 = \begin{pmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & L_3 \cdot \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & L_3 \cdot \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...multiplicando obtenemos  $A_0^3 = A_0^1 \times A_1^2 \times A_2^3$ .

$$A_0^3 = \begin{pmatrix} \cos q_1 \cos(q_2 - q_3) & -\cos q_1 \sin(q_2 + q_3) & \sin q_1 & \cos q_1 (L_3 \cos(q_2 + q_3) + L_2 \cos q_2 + L_1) \\ \sin q_1 \cos(q_2 - q_3) & -\sin q_1 \sin(q_2 + q_3) & -\cos q_1 & \sin q_1 (L_3 \cos(q_2 + q_3) + L_2 \cos q_2 + L_1) \\ \sin(q_2 + q_3) & \cos(q_2 + q_3) & 0 & L_3 \sin(q_2 + q_3) + L_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

### 1.3. RPP - Grua

En la Figura 4 se muestra la estructura básica de un robot grúa (RPP) de 3 GDL. A la derecha de la Figura están los sistemas de coordenadas móviles siguiendo la convención de DH.

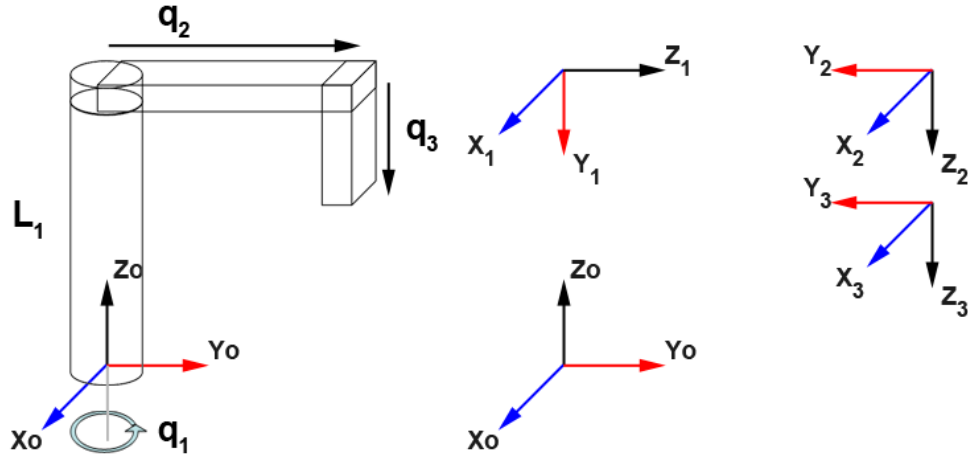


Figura 4: Estructura cinemática de robot grúa 3GDL

Los parametros de DH correspondientes son:

Eslabón	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$L_1$	0	$-\pi/2$
2	0	$q_2$	0	$-\pi/2$
2	0	$q_3$	0	0

Tabla 3: Parametros DH - Grua

Sustituyendo cada uno de los parámetros D-H en la matriz de transformación para cada sistema local, tenemos:

1<sup>er</sup> Grado de Libertad (base)

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2<sup>do</sup> Grado de Libertad (hombro)

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3<sup>er</sup> Grado de Libertad (extremo)

$$\mathbf{A}_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos las matrices para hallar la matriz total  $A_0^3 = A_0^1 \times A_1^2 \times A_2^3$ :

$$\mathbf{A}_0^2 = \begin{pmatrix} \cos q_1 & \sin q_1 & 0 & -q_2 \sin q_1 \\ \sin q_1 & -\cos q_1 & 0 & q_2 \cos q_1 \\ 0 & 0 & -1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_0^3 = \begin{pmatrix} \cos q_1 & \sin q_1 & 0 & -q_2 \sin q_1 \\ \sin q_1 & -\cos q_1 & 0 & q_2 \cos q_1 \\ 0 & 0 & -1 & L_1 - q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## 1.4. PRP - Cilindrico modificado

En la Figura 5 se ilustra un robot de 3GDL que corresponde a un robot cilindrico modificado. El sistema base  $X_0, Y_0, Z_0$  se encuentra en contacto con la superficie de la placa de apoyo. Siguiendo la convencion de DH, se obtienen que los parametros son los de la Tabla 1.4

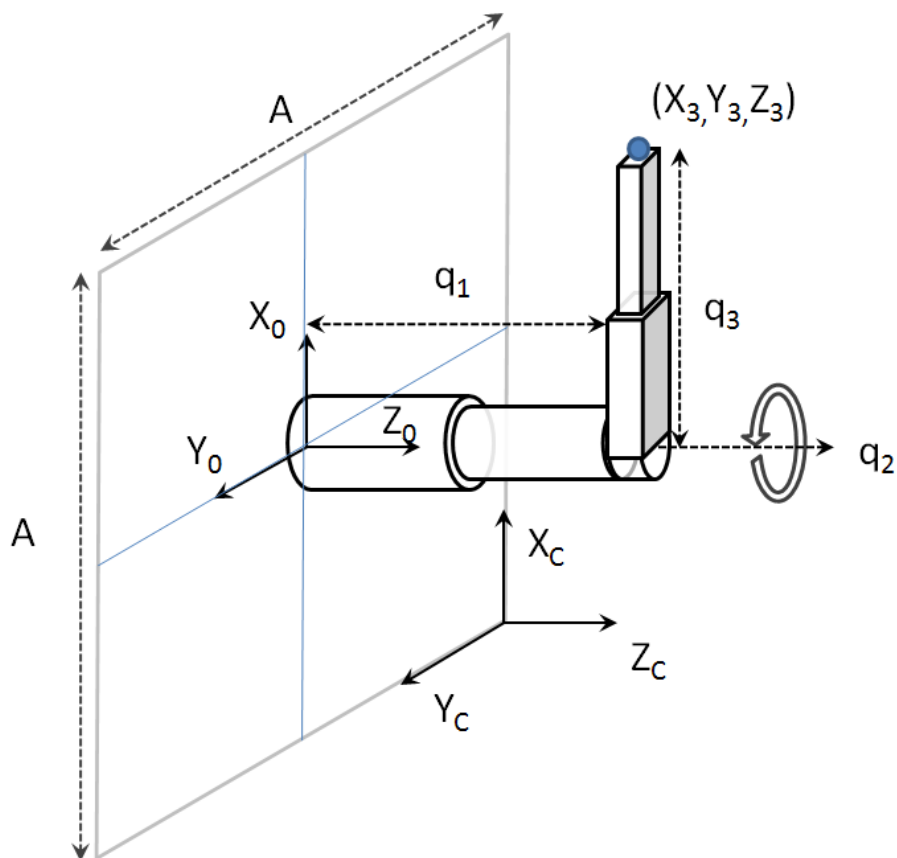


Figura 5: Estructura cinemática de robot cilindrico modificado

Los parametros de DH correspondientes son:

Eslabón	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\pi/2$	$q_1$	0	0
2	$q_2$	0	0	$\pi/2$
2	0	$q_3$	0	0

Tabla 4: Parametros DH - Robot cilindrico modificado

Sustituyendo cada uno de los parámetros D-H en la matriz de transformación para cada sistema local, tenemos:

1<sup>er</sup> Grado de Libertad

$$\mathbf{A}_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2<sup>do</sup> Grado de Libertad

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & 0 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3<sup>er</sup> Grado de Libertad

$$\mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos las matrices para hallar la matriz total  $A_0^3 = A_0^1 \times A_1^2 \times A_2^3$ :

$$\mathbf{A}_{02} = \begin{pmatrix} -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 & 0 \\ \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{03} = \begin{pmatrix} -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 & q_3 \cos q_2 \\ \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & q_3 \sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 1.5. RRP - Esferico basico

En la Figura 6 se ilustra un robot de 3GDL cuyo volumen de trabajo es esferico. Siguiendo la convencion de DH, se obtienen que los parametros son los de la Tabla 1.5

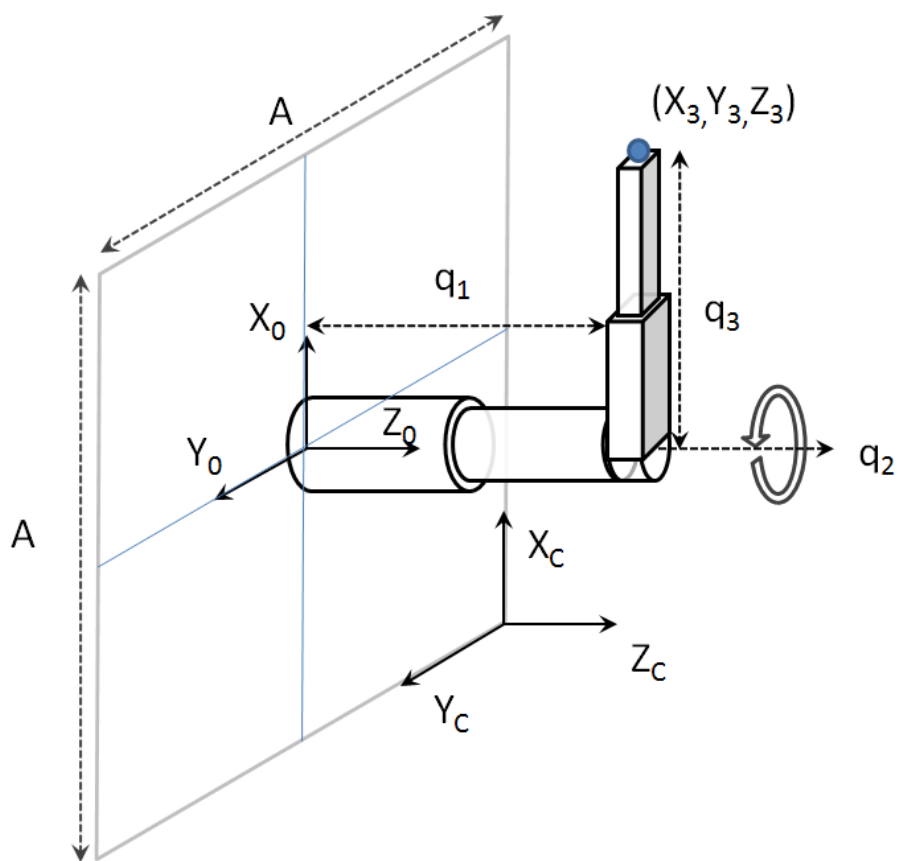


Figura 6: Estructura cinemática de robot esférico

Los parametros de DH correspondientes son:

Eslabón	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1 + \pi/2$	$L_1$	0	$\pi/2$
2	$q_2 + \pi/2$	0	0	$-\pi/2$
2	0	$q_3$	0	0

Tabla 5: Parametros DH - Robot esférico basico

Sustituyendo cada uno de los parámetros D-H en la matriz de transformación para cada sistema local, tenemos:

1<sup>er</sup> Grado de Libertad

$$\mathbf{A}_{01} = \begin{pmatrix} -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2<sup>do</sup> Grado de Libertad

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 & 0 \\ \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3<sup>er</sup> Grado de Libertad

$$\mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos las matrices para hallar la matriz total  $A_0^3 = A_0^1 \times A_1^2 \times A_2^3$ :

$$\mathbf{A}_{02} = \begin{pmatrix} \sin q_1 \sin q_2 & \cos q_1 & -\sin q_1 \cos q_2 & 0 \\ -\cos q_1 \sin q_2 & \sin q_1 & \cos q_1 \cos q_2 & 0 \\ \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{03} = \begin{pmatrix} \sin q_1 \sin q_2 & \cos q_1 & -\sin q_1 \cos q_2 & -q_3 \sin q_1 \cos q_2 \\ -\cos q_1 \sin q_2 & \sin q_1 & \cos q_1 \cos q_2 & q_3 \cos q_1 \cos q_2 \\ \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & \sin q_2 q_3 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 1.6. RPP - Grúa

En la Figura 7 se muestra la estructura básica de un robot grúa (RPP) de 3 GDL. Sobre la misma Figura se observan los sistemas de coordenadas móviles, los grados de libertad, y las masas conocidas de cada eslabon.

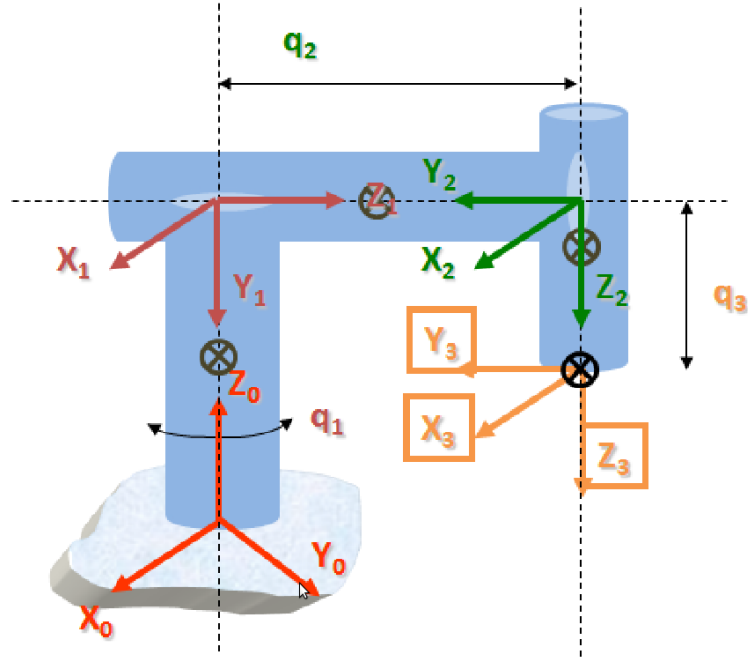


Figura 7: Estructura de robot grúa 3GDL

Posiciones de los centros de masa de cada link

$$\vec{r}_{cm1} = \frac{L_1}{2} \hat{k}_0 \quad (3)$$

$$\vec{r}_{cm2} = L_1(-\hat{j}_1) + (q_2 + \frac{L_2}{2})\hat{k}_1 \quad (4)$$

$$\vec{r}_{cm3} = L_1(-\hat{k}_2) + q_2(-\hat{j}_2) + (q_3 - \frac{L_3}{2})\hat{k}_2 \quad (5)$$

$$\omega_{cm1} = \dot{q}_1 \hat{k}_0 \quad (6)$$

$$\omega_{cm2} = \dot{q}_1(-\hat{j}_1) \quad (7)$$

$$\omega_{cm3} = \dot{q}_1(-\hat{k}_2) \quad (8)$$

Calculo de las energias cineticas y potenciales de cada link

### Link 1

$$\vec{v}_{cm1} = \dot{\vec{r}}_{cm1} + \vec{\omega}_{cm1} \times \vec{r}_{cm1} = 0 + (\dot{q}_1 \hat{k}_0) \times \left( \frac{L_1}{2} \hat{k}_0 \right) = 0 \quad (9)$$

$$K_{v1} = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_{cm1}|^2 = 0 \quad (10)$$

$$K_{w1} = \frac{1}{2} \omega_1^T I_1 \omega_1 = \frac{1}{2} [0 \quad 0 \quad \dot{q}_1] \quad (11)$$

$$K_1 = K_{v1} + K_{w1} \rightarrow K_1 = \frac{1}{4} m_1 R_1^2 \dot{q}_1^2 \quad (12)$$

$$U_1 = m_1 g \frac{L_1}{2} \quad (13)$$

### Link 1

$$\vec{v}_{cm2} = \dot{\vec{r}}_{cm2} + \vec{\omega}_{cm2} = \dot{q}_2 \hat{k}_1 + \dot{q}_1 (-\hat{j}_1) \times L_1 (-\hat{j}_1) \quad (14)$$